RACIONALIZAÇÃO

INTRODUÇÃO

Uma fração com raiz de qualquer ordem não pode ficar no denominador, ou seja, não pode ter raízes na parte de baixo de uma fração. Para se corrigir esta falha usa-se uma técnica chamada de **"Racionalização de Frações"**.

Esta técnica consiste em multiplicar a fração dada por um número que não altere o seu valor **(apenas a sua apresentação)**.qual o número que pode ser multiplicado por qualquer outro e não altera o valor deste outro número? O 1 (um)

Qualquer número multiplicado por 1 continua com o mesmo valor, veja os exemplos:

$$5 \cdot 1 = 5$$

$$123 \cdot 1 = 123$$

Também se sabe que qualquer fração que tenha o numerador (parte de cima da fração) igual ao denominador (parte de baixo da fração) vale 1:

$$\frac{5}{5} = 1 \qquad \frac{-31}{-31} = 1$$

$$\frac{2{,}521}{2{,}521} = 1 \qquad \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{23}} = 1$$

$$\frac{\sqrt{\frac{7}{32}}}{\sqrt{\frac{7}{32}}} = 1 \qquad \frac{-\sqrt{27}}{-\sqrt{27}} = 1$$

1º CASO:

O primeiro caso é quando temos apenas uma raiz sozinha no denominador. Vamos ver como se racionaliza uma fração aplicando em um exemplo. Temos a fração $\frac{32}{\sqrt{5}}$ e queremos saber uma representação para este mesmo valor, mas sem nenhuma raiz em baixo.

A técnica diz que devemos multiplicar esta fração por outra fração que tenha valor 1 para não alterar seu valor.

Esta fração deve ter seu denominador igual ao seu numerador e ambos iguais ao denominador da fração a ser modificada, no caso $\sqrt{5}$.

$$\frac{32}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

Ao multiplicarmos por esta fração, não estamos alterando nada, pois ela vale 1.

Agora, efetuando esta multiplicação de frações (numerador de uma multiplica o numerador de outra, denominador de uma multiplica o denominador de outra):

$\frac{32 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{32\sqrt{5}}{5}$ Logo a fração procurada é:

$$\frac{32}{\sqrt{5}} = \frac{32\sqrt{5}}{5}$$

EXEMPLOS:

fração	racionalização
$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$
$\frac{3}{\sqrt{3}}$	$\frac{3}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$
$\frac{4}{\sqrt{12}}$	$\frac{4}{\sqrt{12}} \times \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12}} = \frac{4\sqrt{12}}{12} = \frac{\sqrt{12}}{3} = \frac{\sqrt{4 \cdot 3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ Tivemos que fatorar o 12

2º CASO:

O segundo acontece quando, além da raiz temos outro número somado à ela no denominador. Exemplo:

$$\frac{23}{4+\sqrt{5}} \qquad \frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{7}} \qquad \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{21}}$$

Para racionalizar este tipo de fração deve-se, novamente, multiplicar por uma fração de valor 1. Formada pelo denominador da primeira apenas com o sinal do meio trocado.

EXEMPLOS:

$\frac{23}{4+\sqrt{5}}$	$\frac{23}{4+\sqrt{5}} \times \frac{4-\sqrt{5}}{4-\sqrt{5}} = \frac{23 \cdot (4-\sqrt{5})}{(4+\sqrt{5}) \cdot (4-\sqrt{5})} = \frac{92-23\sqrt{5}}{16+4\sqrt{5}-4\sqrt{5}-5} = \frac{92-23\sqrt{5}}{11}$
$\frac{5}{\sqrt{6}+\sqrt{21}}$	$\frac{5}{\sqrt{6}+\sqrt{21}} \times \frac{\sqrt{6}-\sqrt{21}}{\sqrt{6}-\sqrt{21}} = \frac{5 \cdot (\sqrt{6}-\sqrt{21})}{6-21} = \frac{5 \cdot (\sqrt{6}-\sqrt{21})}{-15} = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{21}}{3}$

Note que a fração grifada em azul nos cálculos acima que é a fração que você deve multiplicar.

Ela é igual à parte de baixo da fração que estamos racionalizando, mas com sinal do termo que tem raiz, trocado.

Neste caso, basta multiplicar o numerador e o denominador pelo ***conjugado** do denominador. Assim, obteremos o produto pela diferença, que resulta na diferença de dois quadrados.

***Conjugado:**

Expressão	Conjugado
$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\sqrt{a}-\sqrt{b}$
$\sqrt{a}-\sqrt{b}$	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$

3º CASO:

O terceiro caso ocorre quando se tem uma raiz dentro de outra raiz no denominador. Veja os exemplos:

$\frac{21}{\sqrt{3+\sqrt{7}}}$	$\frac{3}{\sqrt{4+\sqrt{15}}}$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9-\sqrt{29}}}$	$\frac{8}{\sqrt{5-\sqrt{87}}}$

Para resolver estes casos, vamos ter que calcular dois passos. Primeiro devemos multiplicar pela fração formada pela raiz do denominador com o sinal do meio trocado. Veja os **exemplos**:

$\frac{21}{\sqrt{3+\sqrt{7}}}$	$\frac{21}{\sqrt{3+\sqrt{7}}}\times\frac{\sqrt{3-\sqrt{7}}}{\sqrt{3-\sqrt{7}}}=\frac{21\cdot\sqrt{3-\sqrt{7}}}{\sqrt{(3+\sqrt{7})\cdot(3-\sqrt{7})}}=\frac{21\cdot\sqrt{3-\sqrt{7}}}{\sqrt{9-7}}=\frac{21\cdot\sqrt{3-\sqrt{7}}}{\sqrt{2}}$
Ué, mas ainda tem uma raiz no denominador. - Isso mesmo, agora a gente aplica o 1° caso nesse resultado.	
$\frac{21\cdot\sqrt{3-\sqrt{7}}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{21\sqrt{2}\cdot\sqrt{3-\sqrt{7}}}{2}=\frac{21\cdot\sqrt{2\cdot(3-\sqrt{7})}}{2}=\frac{21\sqrt{6-2\sqrt{7}}}{2}$	

4º CASO:

Este último caso é o menos comum de todos. Ele ocorre quando se tem uma raiz diferente de raiz quadrada no denominador. Veja os **exemplos**:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{65}} \qquad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[5]{12^3}}$$

$$\frac{7}{\sqrt[8]{625}} \qquad \frac{121}{\sqrt[11]{121}}$$

Para resolver este tipo de questão, novamente deve-se multiplicar esta fração por uma que seja igual a 1 (que retire a raiz do denominador).

Esta fração será achada através da seguinte propriedade:

$$\sqrt[x]{a^b} \times \sqrt[y]{a^c} = a^{\frac{b}{x}+\frac{c}{y}}$$

Sendo que o expoente do resultado $\frac{b}{x}+\frac{c}{y}$, deve ser 1.Veja o **exemplo**:

$\frac{2}{\sqrt[3]{65}}$	Este será o exemplo que iremos desenvolver. Primeiro iremos transformar a raiz do denominador em potência
$\frac{2}{65^{\frac{1}{3}}}$	Pronto, agora em cima deste $\frac{1}{3}$ devemos achar um expoente que somado a ele resulte 1. $\frac{1}{3}+x=1 \qquad x=1-\frac{1}{3} \qquad x=\frac{2}{3}$ O expoente que procuramos é $\frac{2}{3}$, agora vamos multiplicar.
$\frac{2}{65^{\frac{1}{3}}} \times \frac{65^{\frac{2}{3}}}{65^{\frac{2}{3}}}$	$\frac{2 \cdot 65^{\frac{2}{3}}}{65^{\frac{1}{3}} \times 65^{\frac{2}{3}}} = \frac{2\sqrt[3]{65^2}}{65^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}} = \frac{2\sqrt[3]{65^2}}{65^1} = \frac{2\sqrt[3]{4225}}{65}$ Esta é a resposta final. Pois o 4225, ao ser fatorado, não ajuda em nada.